# Raketenphysik

In diesem Kapitel diskutieren wir den Antrieb unserer Rakete. Die Raketengleichung, die wir zum Ende des zweiten Abschnitts herleiten, gilt dabei für jeden Raketenantrieb, unabhängig davon ob wir Schwarzpulver verbrennen, ein Sauerstoff-Wasserstoff Gemisch verwendet wird oder, wie hier, die Geschwindigkeit des austretenden Mediums nur vom zuvor eingebrachten Druck abhängig ist.
Die drei Abschnitte behandeln das gleiche Thema unter Voraussetzung verschiedener mathematischer Vorkenntnisse.
Im ersten Abschnitt verzichten wir ganz auf eine mathematische Betrachtung.
Der zweite Abschnitt baut auf dem in der Oberstufe behandelten Stoff auf. Dabei verzichten wir auf den Einfluss des Luftwiderstandes sowie auf die Druckminderung während der Ausstoßphase. Da beide Effekte nur relativ kleine Beiträge liefern, die sich in der Wirkung auch zum Teil gegenseitig aufheben, stimmen die theoretischen Ergebnisse erstaunlich gut mit dem Experiment überein.
Der letzte Abschnitt liefert eine ausführliche Betrachtung der Antriebsphase unserer Wasserrakete. Die resultierenden Differentialgleichungen können nur mit numerischen Methoden gelöst werden. Verwendet man jedoch diese Ergebnisse als Startwert für den gesamten Flugverlauf (bis zum Einsetzen der Bergung), so kann man ein Programm schreiben, dass exakt die benötigte Wassermenge, den Geschwindigkeitsverlauf und die Gipfelhöhe berechnet. Die hier verwendete Physik lernen Naturwissenschaftler und Ingenieure während der ersten Semester. Da wir jeden Schritt erklären, sollte jedoch auch ein interessierter Oberstufenschüler in der Lage sein die Erklärungen nachzuvollziehen.

## *anschaulich*

Der verbreitetste Irrtum über das Funktionsprinzip einer konventionellen Rakete ist die Vorstellung, dass die Beschleunigung aus einem Abstoßen am Widerstand der Luft resultiert. Spätestens mit der Frage, wie dieses Abstoßen im Weltall - also im luftleeren Raum - funktionieren soll, steht diese Auffassung jedoch vor einem größeren Dilemma. Dennoch ist diese Vorstellung nicht ganz unbegründet - sie resultiert aus der Erfahrung des Luftwiderstandes, die wir beispielsweise machen, wenn wir eine Platte durch die Luft schwenken. Diesen Effekt nutzt auch jeder Propeller. Wo ist aber nun der Fehler? Den Fehler entdecken wir, wenn wir ein einzelnes ausgestoßenes Teilchen mitten im Düsenstrom betrachten. Bevor sich dieses nämlich an einem verhältnismäßig ruhenden Luftmolekül abstoßen und damit seine Energie verlieren kann, hat es längst den Wirkungsbereich, in dem es die Rakete "anschieben" könnte verlassen. Tatsächlich findet bei Raketenmotoren auch ein Abstoßen gegenüber dem Luftwiderstand statt, jedoch ist dieser Effekt vernachlässigbar gegenüber einem zweiten.
Diesen können wir uns ebenfalls leicht veranschaulichen, indem wir uns vorstellen, dass eine Person auf Eis steht und versucht einen schweren Stein wegzustoßen. Das Ergebnis wird sein, dass unsere Testperson und der Stein sich in entgegen gesetzte Richtungen auseinander bewegen. Das physikalische Prinzip, welches dahinter steckt ist die Impulserhaltung. Diese besagt nichts anderes als, dass sich der Schwerpunkt aller beteiligten Massen vor und nach einem Ereignis in der gleichen Weise wie zuvor bewegt. Dies ist natürlich nur dann exakt gültig, wenn keine zusätzlichen Energien, wie unterschiedliche Reibungsverluste, zum Tragen kommen.
Mit dieser Grundlage werden wir nun - zunächst stark vereinfacht - mathematisch beschreiben, wie sich unsere Wasserrakete verhalten wird.

## *Oberstufenlevel*

Wir betrachten zunächst das Verhalten der Flüssigkeit in der Rakete. Ein Flüssigkeitsteilchen bewege sich entlang der Raketenachse. Wenn wir zu einem bestimmten Zeitpunkt, den wir ***t=0*** nennen, seine exakte Position $\boldsymbol{x_0}$ und seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v_0}$ kennen und wissen, welche gleichmäßige Beschleunigung ***a*** es erfährt, dann können wir mit Hilfe der Bewegungsgleichung seinen Standort zu jedem Zeitpunkt ermitteln.

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \qquad (1)$$

Wenn wir nun den Zeitpunkt so wählen, dass sich das Flüssigkeitsteilchen gerade im Stillstand befindet, so resultiert die Ortsveränderung ausschließlich aus der Beschleunigung.

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

Gleiches gilt für die Geschwindigkeit als Ableitung der Ortsveränderung nach der Zeit:

$$\dot{x} = v = at \qquad (3)$$

Löst man Gleichung (2) nach ***t*** auf und setzt sie in Gleichung (3) ein so erhält man:

$$v = \sqrt{2ax} \qquad (4)$$

Nun können wir die Beschleunigung für einen diskreten Zeitpunkt (Masse = konstant) gemäß $F = ma$ durch die in diesem Augenblick auf die Masse ***m*** wirkende Kraft ***F*** ersetzen:

$$v = \sqrt{2x\frac{F}{m}} \qquad (5)$$

Der Überdruck **Δ*p*** (Druck im Druckbehälter minus Umgebungsdruck) erzeugt in unserem Druckbehälter die Kraft ***F*** auf die Wassersäule mit dem Querschnitt (der Düse) ***A*** gemäß:

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{F}{A} \qquad (6)$$

Einsetzen in Gleichung (5) ergibt:

$$v = \sqrt{2x\frac{\Delta pA}{m}} \qquad (7)$$

Die Masse, die wir betrachten, ist die Wassersäule zwischen Düsenöffnung und Pegelhöhe. Da es sich hier um ein flüssiges Medium handelt führen wir die Dichte ein:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{xA} \quad ; \qquad (\rho_{Wasser} = 1\, kg/l) \qquad (8)$$

Mit dieser Ersetzung reduziert sich Gleichung (7) auf einen Ausdruck, der die Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers nur noch als Funktion der Druckdifferenz darstellt. Das reale Strömungsverhalten ist hier vernachlässigbar:

$$v = \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho}} \qquad (9)$$

Als **Ausstoßrate** wird der Quotient aus Masse pro Zeit bezeichnet.

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (10a)$$

Lösen wir den Ausdruck (8) nach ***m*** auf, so erhalten wir aus dem letzten Ausdruck die Gleichung:

$$\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}\rho \cdot A = v \cdot \rho \cdot A \qquad (10b)$$

Die **Schubkraft** ergibt sich aus der pro Zeit ausgestoßenen Masse multipliziert mit ihrer Geschwindigkeit, damit erhalten wir aus (10b) den ersten Teil der Gleichung. Der zweite Teil der Gleichung ergibt sich aus (9), in dem wir diesen Ausdruck quadrieren und nach $\boldsymbol{\Delta p}$ auflösen und in die Gleichung einsetzen:

$$F = \mu \cdot v \; = A\rho \cdot v^2 \; = 2A\Delta p \qquad (11)$$

Die vertikale Beschleunigung der Rakete ergibt sich bei ***vernachlässigtem Luftwiderstand*** und unter Annahme eines ***konstanten Überdruckes*** während der Brenndauer aus:

$$a = \frac{F}{m} - g \text{ ; (Erdbeschleunigung: g = 9,81 m/s}^2\text{)} \qquad (12)$$

wir können diesen Ausdruck auch schreiben als:

$$\frac{dv_R}{dt} = v \frac{dm}{dt} \frac{1}{m} - g \qquad (12b)$$

Diesen können wir mit *dt* multiplizieren und integrieren:

$$\int_0^{v_B} dv_R = v \int_{m_0}^{m_{leer}} \frac{1}{m} dm - g \int_0^{t_B} dt \qquad (12c)$$

über den Zeitraum, den das Wasser zum Ausströmen benötigt also:

$$t_B = \frac{V_W}{Av}$$

ergibt das Integral die Brennschlussgeschwindigkeit der Rakete:

$$v_B = v \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_{leer}}\right) - gt_B \qquad \text{mit: } m_0 = m_{leer} + \rho V_{Wasser} \qquad (13)$$

Gleichung (13) wird auch als Raketengleichung bezeichnet.
Aus diesen Werten können wir eine Abschätzung der erreichten Höhe bis zum Brennschluss vornehmen:

$$h_B \approx \frac{1}{2} t_B \cdot v_B \qquad (14)$$

Damit erhalten wir die Höhe des Parabelfluges zu:

$$h_P = \frac{v_B^2}{2g} \qquad (15)$$

und damit eine **Gipfelhöhe** von:

$$h = h_B + h_P \qquad (16)$$

Die verwendete Annahme $\Delta p = const$ ist bei einer typischen Füllmenge von 1/3 Wasser keine übertriebene Näherung. Wir können Pressluft in diesem Fall noch als ideales Gas ansehen für welches die reziproke Beziehung zwischen Druck und Volumen gilt:

$$p \propto \frac{1}{V} \qquad (17)$$

Damit verringert sich der Druck im Druckbehälter während der Brennphase nur um den Quotienten 1,5. Bei 10 bar Ausgangsdruck verbleibt nach Ablauf der Brennzeit immer noch ein Überdruck von 6,67 bar.
Nun wollen wir einige der hier verwendeten Näherungen über Bord werfen und uns direkt über die Impulserhaltung an das Phänomen heranwagen.

## *Hochschulniveau*

Wir betrachten das Problem auch in der folgenden Herleitung nur in einer Dimension. Dieses Vorgehen stellt keine Beeinträchtigung der Genauigkeit dar, da alle angreifenden Kräfte nur Anteile in dieser Richtung besitzen.
Betrachten wir zunächst die diskret geltende Impulserhaltung für Rakete und Wasser:

$$p_R(t) = -p_W(t) \tag{18}$$

Der Kraftstoß $F\Delta t$ entspricht der Impulsdifferenz des ausströmenden Wassers zu zwei Zeiten:

$$F\Delta t = p(t+\Delta t) - p(t) = \int_0^{t+\Delta t} \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t)dt - \int_0^{t} \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t)dt \tag{19}$$

Division durch $\Delta t$ und die Subtraktion der Integrale ergibt:

$$F = \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \frac{\int_t^{t+\Delta t} \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t)dt}{\Delta t} \tag{20}$$

Die momentane Schubkraft erhalten wir durch Bildung des Limes $\Delta t \to 0$.

$$F(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t)dt}{\Delta t} \tag{21}$$

$$F(t) = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \int_t^{t+\Delta t} \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t)dt = \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t) \tag{22}$$

Aus dem dritten Newtonschen Axiom (Aktion = Reaktion) folgt sofort der Schub der Rakete:

$$F_S = -F = -\frac{dm}{dt} \cdot v_{-z} \tag{23}$$

Die Gravitation geht mit folgendem Kraftterm ein:

$$F_g = mg_{-z} \tag{24}$$

Der Luftwiderstand liefert den folgenden Beitrag:

$$F_L = c_w \int_B q \cdot dS \tag{25}$$

Hierbei ist $q$ der Staudruck, der aus der vor unserer Rakete komprimierten Luft entsteht:

$$q = \frac{\rho_L \cdot v_R^{\ 2}}{2} \tag{26}$$

Das Integral verläuft über die Bild- oder Projektionsfläche unseres Flugkörpers in Flugrichtung, da die Geschwindigkeitskomponente von $q$ senkrecht auf dieser Ebene steht, können wir $q$ vor das Integral ziehen:

$$F_L = c_w q \int_B n_z \cdot d(r,\varphi) \tag{27}$$

Da die resultierende Kraft entgegen der Bewegungsrichtung unserer Rakete wirkt erhalten wir schließlich den folgenden Term mit negativem Vorzeichen:

$$F_L = -\frac{1}{2} c_w \rho_L B v_R^{\ 2} \tag{28}$$

Mit allen Krafttermen können wir nun die Bewegungsgleichung aufstellen, hierbei ist zu berücksichtigen, dass nicht nur der Ort, sondern auch die Masse eine Funktion der Zeit darstellt:

$$m(t)\cdot a(t)=\frac{dm(t)}{dt}\cdot v(t)-m(t)\cdot g-\frac{1}{2}c_w\rho_L Bv_R(t)^2 \tag{28}$$

Wir erhalten für die Beschleunigung unserer Rakete die folgende Differentialgleichung:

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{m(t)}\frac{dm(t)}{dt}\cdot v(t)-g-\frac{1}{2m(t)}c_w\rho_L Bv_R(t)^2 \tag{29}$$

Die Startmasse unserer Rakete setzt sich aus ihrem Eigengewicht und der Füllmenge Wasser zusammen:

$$m_{Start}=m_{Rakete}+(V_{Behälter}-V_{Luft})\rho_{H_2O} \tag{30}$$

Die zu einem bestimmten Zeitpunkt nach dem Start ausgetretene Masse erhalten wir aus:

$$m_{aus}(t)=\rho\cdot B\cdot(h-h_0)(t)=\rho\cdot B\cdot\int_0^t v_{Pegel}(\xi)d(\xi) \tag{31}$$

Dabei haben wir die Fläche B aus der Projektionsfläche des Luftwiderstandes verwendet, die abzüglich der vernachlässigbaren Dicke der Plastikhülle unseres Druckkörpers, der Oberfläche der Wassersäule entspricht.
Aufgrund der Kontinuitätsbedingung können wir die ausgetretene Masse auch abhängig von der Geschwindigkeit des Wassers in der Düse darstellen:

$$m_{aus}(t)=\rho\cdot B\cdot\int_0^t v_{Pegel}(\xi)d(\xi)=\rho\cdot A\cdot\int_0^t v_{Düse}(\xi)d(\xi) \tag{32}$$

Wir erhalten für diesen Zeitpunkt die Gesamtmasse der Rakete (Eigengewicht + Restmenge Wasser) zu:

$$m(t)=m_{Start}-m_{aus}(t)=m_{Rakete}+(V_{Behälter}-V_{Luft})\rho-\rho\cdot A\cdot\int_0^t v_{Düse}(\xi)d(\xi) \tag{33}$$

und ebenso die Ausstoßrate, wie wir sie schon in der vereinfachten Herleitung verwendet haben.:

$$\mu(t)=\frac{dm(t)}{dt}=\rho\cdot A\cdot v_{Düse}(t) \tag{34}$$

Die Beschleunigung unserer Rakete können wir, unter Berücksichtigung, dass $v_{Düse}$ hier durch den oben identisch verwendeten Ausdruck $v$ ersetzt wird, nun wie folgt ausdrücken:

$$a(t)=\frac{\rho\cdot A\cdot v(t)^2}{m_{Start}-\rho\cdot A\cdot\int_0^t v(\xi)d\xi}-g-\frac{\frac{1}{2}c_w\rho_L Bv_R(t)^2}{m_{Start}-\rho\cdot A\cdot\int_0^t v(\xi)d\xi} \tag{35}$$

$$\Rightarrow a(t)=\frac{\rho\cdot A\cdot v(t)^2-\frac{1}{2}c_w\rho_L Bv_R(t)^2}{m_{Start}-\rho\cdot A\cdot\int_0^t v(\xi)d\xi}-g \tag{36}$$

Um die Bewegungsgleichung zu lösen benötigen wir einen Ausdruck für die Austrittsgeschwindigkeit unserer Wasserfüllung aus der Düse. Das Gesetz von Bernoulli ist in diesem Fall Ausgangspunkt für unsere Herleitung. Es besagt, dass die Summe aus statischem, kinetischem und geodätischem Druck an jeder Stelle eines geschlossenen, fließenden Systems konstant ist.

(Streng genommen stellt auch Bernoulli eine Näherung dar, da Reibungsverluste an den Oberflächen vernachlässigt werden.) Betrachten wir nun sowohl den Zustand am Pegelstand (Druck der Pressluft) als auch am Ende der Düse (Umgebungsdruck):

$$p_P + \rho g h_{Pegel} + \frac{\rho v_B{}^2}{2} = p_{umg} + \rho g h_{Düse} + \frac{\rho v^2}{2} = const \tag{37}$$

Das Quadrat der Austrittsgeschwindigkeit folgt damit zu:

$$v^2 = \frac{2}{\rho} \cdot (p_P - p_{umg}) + 2g(h_{Pegel} - h_{Düse}) + v_B{}^2 \tag{38}$$

Hierbei stellt der zweite Term keine Wechselwirkung zwischen Rakete und Wasser dar und trägt somit nicht zum Schub der Rakete bei - es folgt:

$$v^2 = \frac{2}{\rho} \cdot (p_P - p_{umg}) + v_B{}^2 \tag{39}$$

Der Druck im Behälter fällt, während das Wasser herausgepresst wird, so schnell ab, dass in dieser Zeit nahezu kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. In der Thermodynamik spricht man hier von einer adiabatischen Zustandsänderung. (*dQ = 0* )
Aus dem ersten Hauptsatz:

$$dU = dQ - pdV \tag{40}$$

folgt:

$$p(t) \cdot V^{\mathrm{K}} = const \tag{41}$$

entsprechend können wir schreiben:

$$p(t) \cdot \left[ V_0 + A \cdot \int_0^t v(\xi) d\xi \right]^{\mathrm{K}} = p_0 V_0{}^{\mathrm{K}} \tag{42}$$

$$\Rightarrow p(t) = p_0 \cdot \frac{V_0{}^{\mathrm{K}}}{\left[ V_0 + A \cdot \int_0^t v(\xi) d\xi \right]^{\mathrm{K}}} \tag{43}$$

Ersetzen wir den Druck im Behälter aus Gleichung (39) durch diesen zeitabhängigen Term, so erhalten wir:

$$v^2 = \frac{2}{\rho} \cdot \left( p_0 \cdot \frac{V_0{}^{\mathrm{K}}}{\left[ V_0 + A \cdot \int_0^t v(\xi) d\xi \right]^{\mathrm{K}}} - p_{umg} \right) + v_B{}^2 \tag{44}$$

Die schon zuvor verwendete Kontinuitätsgleichung, welche besagt, dass in einem geschlossenen Leitungssystem zum gleichen Zeitpunkt durch verschiedene Leitungsabschnitte eine identische Wassermenge fließen muss:

$$v_B = \frac{A}{B} v, \tag{45}$$

gibt uns die Möglichkeit, Gleichung (44) auf zwei Weisen umzuschreiben.
**Entweder** wir betrachten die Geschwindigkeit des Pegels innerhalb des Druckbehälters:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 v_B{}^2 = \frac{2}{\rho}\cdot\left( p_0 \cdot \frac{V_0{}^{K}}{\left[V_0 + B\cdot\int\limits_0^t v_B(\xi)d\xi\right]^{K}} - p_{umg}\right) + v_B{}^2 \qquad (46)$$

Gleichung (46) enthält Ableitungen von $h(t)$ nullter Ordnungen:

$$\int\limits_0^t v_B(\xi)d\xi = h(t) \qquad (47)$$

und erster Ordnung:

$$v_B(t) = \frac{dh}{dt} \qquad (48)$$

wir können damit die Differentialgleichung auch in der Form:

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\rho}\cdot\left( p_0 \cdot \frac{V_0{}^{K}}{\left[V_0 + B\cdot h\right]^{K}} - p_{umg}\right) + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \qquad (49)$$

schreiben.

**Oder** wir betrachten den Verlauf der Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus der Düse:

$$v^2 = \frac{2}{\rho}\cdot\left( p_0 \cdot \frac{V_0{}^{K}}{\left[V_0 + A\cdot\int\limits_0^t v(\xi)d\xi\right]^{K}} - p_{umg}\right) + \left(\frac{A}{B}\right)^2 v^2 \qquad (50)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\cdot\left( p_0 \cdot \frac{V_0{}^{K}}{\left[V_0 + A\cdot\int\limits_0^t v(\xi)d\xi\right]^{K}} - p_{umg}\right)}{1-\left(\frac{A}{B}\right)^2}} \qquad (51)$$

Die Lösung dieser DGL erfolgt durch Diskretisierung und Iteration. $\Delta t = 0$

$$v(\tau+1) = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\cdot\left( p_0 \cdot \frac{V_0{}^{K}}{\left[V_0 + \left(\sum\limits_0^\tau A\cdot v(\tau)\right)\cdot\Delta t\right]^{K}} - p_{umg}\right)}{1-\left(\frac{A}{B}\right)^2}} \qquad (52)$$

Den gleichen Iterationsschritt führen wir mit unserer Bewegungsgleichung (36) durch:

$$a(\tau+1)=\frac{\rho\cdot A\cdot v(\tau)^2-\frac{1}{2}c_w\rho_L B v_R(\tau)^2}{m_{Start}-\left(\sum_0^\tau \rho\cdot A\cdot v(\tau)\right)\cdot\Delta t}-g \tag{53}$$

Die momentane Geschwindigkeit der Rakete erhalten wir aus:

$$v_R(\tau+1)=\frac{(a(\tau)+a(\tau+1)}{2}\Delta t+v_R(\tau) \tag{54}$$

entsprechend ergibt sich der zurückgelegte Weg aus:

$$s(\tau+1)=\frac{(v(\tau)+v(\tau+1)}{2}\Delta t+s(\tau) \tag{55}$$

Die Startwerte $v(0)$ und $a(0)$ erhalten wir, indem wir in den Gleichungen (52) und (53) zum Zeitpunkt $t = 0$ zunächst $\Delta t = 0$ setzen. Daraus resultiert natürlich:

$$v(\tau+1)=v(\tau)=v(0) \quad \text{und} \quad a(\tau+1)=a(\tau)=a(0)$$

Die Iteration führen wir dann mit einem Wert $\Delta t > 0$ durch. Hier gilt: je kleiner der Wert - desto exakter das Ergebnis, jedoch auch - desto mehr Iterationsschritte sind notwendig.
Die Abbruchbedingungen für die Iteration sind:

$$(m_{Start}-m_{Rakete})-\left(\sum_0^\tau \rho\cdot A\cdot v(\tau)\right)\cdot\Delta t=(V_{Behälter}-V_{Luft})\rho-\left(\sum_0^\tau \rho\cdot A\cdot v(\tau)\right)\cdot\Delta t\le 0 \tag{56}$$

...also der Augenblick in dem die ursprünglich vorhandene Menge Wasser komplett ausgestoßen wurde. Oder:

$$p_0\cdot\frac{V_0^{\mathrm{K}}}{\left[V_0+\left(\sum_0^\tau A\cdot v(\tau)\right)\cdot\Delta t\right]^{\mathrm{K}}}-p_{umg}\le 0 \tag{57}$$

...also der Moment, in dem kein Überdruck im Druckbehälter mehr vorhanden ist um das restliche Wasser auszustoßen.

Diese Herleitung enthält als freie Parameter die Volumen von Druckbehälter, Wasserfüllung und Überdruck. Aus den Ergebnissen der Iteration ist es wiederum möglich den Parabelflug zu berechnen bzw. als Maximalwertbetrachtung, die optimale Wassermenge für die maximale Flughöhe zu ermitteln.

Entsprechende Programme, die diese Optimierung beherrschen, existieren. Beispielsweise findet man im Internet unter:

http://polyplex.org/cjh/rockets/simulation/

ein Programm, welches diese Berechnung online durchführt.